Filterabbildungen

Herrn Professor Dr. Hans Robert Müller zum achtzigsten Geburtstag

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 42, 1990/91, S.7-26

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Filterabbildungen

Herrn Professor Dr. Hans Robert Müller zum achtzigsten Geburtstag

Von **Hans-Joachim Kowalsky,** Braunschweig

(Eingegangen am 3.5.1991)

Einleitung

Ultrafilter spielen zum Beispiel in der Analysis und in der Topologie, in der Algebra und in der Modelltheorie eine wichtige Rolle und stellen ein wirkungsvolles Konstruktionsmittel dar. Abgesehen von Trivialfällen, entzieht sich jedoch die Struktur von Ultrafiltern einer einfachen Beschreibung. Zwar kann man mit gegebenen Ultrafiltern neue Ultrafilter erzeugen, deren Aufbau komplizierter zu sein scheint; aber ein befriedigender Strukturvergleich bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Ein naheliegendes Hilfsmittel hierzu sind Abbildungen, die Filter auf Filter abbilden und die mit den Operationen des Filterverbands in geeigneter Weise gekoppelt sind. Der Untersuchung derartiger Filterabbildungen dienen die folgenden Betrachtungen, die sich stets auf eine feste unendliche Grundmenge X beziehen.

Ein erster Abschnitt dient der Zusammenstellung von Begriffen und Bezeichnungen. Die Filter von X bilden hinsichtlich der mengentheoretischen Inklusion einen vollständigen, distributiven Verband. Hier wird jedoch die duale Ordnung bevorzugt, weil bei ihr den Operationen des Filterverbands direkt die entsprechenden mengentheoretischen Operationen bei den Filtermengen entsprechen.

Im zweiten Abschnitt werden die von Abbildungen $X \to X$ induzierten Filterabbildungen betrachtet. Sie werden zur Definition von „einfachen" Ultrafiltern benutzt, die auf eine weitere Art gekennzeichnet werden und über die ein Existenzsatz bewiesen wird.

Der dritte Abschnitt befaßt sich mit Booleschen Homomorphismen, nämlich mit Abbildungen des Potenzmengenverbandes von X in sich, die mit der Vereinigungs-, Durchschnitts- und Komplementbildung vertauschbar sind. Auch sie induzieren Filterabbildungen, deren Eigenschaften näher untersucht werden. Insbesondere ergibt sich ein Überblick über alle möglichen Booleschen Homomorphismen, und es wird ein von Punktabbildungen her bekannter Satz auf Boolesche Homomorphismen erweitert.

Im letzten Abschnitt werden schließlich Filter der Menge aller Abbildungen $X \to X$ herangezogen, die ihrerseits Filterabbildungen im Filterverband von X induzieren. Die Klasse dieser Filterabbildungen, für die ebenfalls Existenz- und Kennzeichnungssätze bewiesen werden, erweist sich als außerordentlich reichhaltig.

1. Filter

Nachfolgend bedeute X immer eine feste unendliche Grundmenge der Mächtigkeit $|X| = k$.

Ein System $\mathfrak{a}$ aus Teilmengen von X heißt bekanntlich ein Filter von X, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

(F1) $\mathfrak{a} \neq \emptyset$.
(F2) *Aus* $A_1 \in \mathfrak{a}$ *und* $A_2 \in \mathfrak{a}$ *folgt* $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{a}$.
(F3) *Aus* $A \in \mathfrak{a}$ *und* $A \subset A'$ *folgt auch* $A' \in \mathfrak{a}$.

Zugelassen wird, daß ein Filter die leere Menge enthält. Dann besteht dieser Filter wegen (F3) aber aus allen Teilmengen von X. Er wird der Nullfilter genannt und mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet.

Ein Mengensystem $\mathfrak{A}$ heißt Filterbasis, wenn das System aller Obermengen von Mengen aus $\mathfrak{A}$ ein Filter ist. Der in diesem Sinn von $\mathfrak{A}$ erzeugte Filter soll mit $\overline{\mathfrak{A}}$ bezeichnet werden. Das einelementige System $\{A\}$ ist eine Filterbasis. Der von ihr erzeugte Filter wird der durch A bestimmte Hauptfilter genannt und vereinfachend mit $\overline{A}$ bezeichnet. Er besteht aus allen Obermengen von A. Speziell gilt $\mathfrak{o} = \overline{\emptyset}$.

Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Filter von X wird durch die mengentheoretische Inklusion geordnet und bildet hinsichtlich dieser Ordnungsrelation einen vollständigen und distributiven Verband. Hier soll allerdings die duale Ordnungsrelation bevorzugt werden.

Definition 1a: *Der Filter* $\mathfrak{a}$ *heißt feiner als der Filter* $\mathfrak{b}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *heißt gröber als* $\mathfrak{a}$ *(unter Einschluß der Gleichheit) – in Zeichen:* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *–, wenn* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ *gilt.*

Feinere Filter enthalten demnach mehr Mengen und daher auch kleinere Mengen. In dem hinsichtlich dieser dualen Ordnung gebildeten Filterverband ist $\mathfrak{o}$ der feinste und $\overline{X}$ der gröbste Filter. Ferner spiegeln sich jetzt bei der Vereinigungs- und Durchschnittsbildung von Filtern diese Operationen in den entsprechenden mengentheoretischen Operationen bei den Filtermengen wider: Ist $\{\mathfrak{a}_\iota : \iota \in I\}$ eine beliebige Menge von Filtern, so erhält man die Mengen des Vereinigungsfilters, der mit $\bigvee \mathfrak{a}_\iota$ bezeichnet werden soll, indem man für jeden Index $\iota \in I$ eine Menge $A_\iota \in \mathfrak{a}_\iota$ auswählt und deren mengentheoretische Vereinigung $\bigcup A_\iota$ bildet. Die Mengen des Durchschnittsfilters werden indes nur durch endliche mengentheoretische Durchschnittsbildung gewonnen: Man wähle endlich viele Indizes $\iota_1, \ldots, \iota_n \in I$ aus, zu jedem dieser Indizes ι_ν eine Menge $A_{\iota_\nu} \in \mathfrak{a}_{\iota_\nu}$ und bilde sodann den Durchschnitt $A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n}$. Hieraus folgt für eine absteigende Kette von Filtern $\mathfrak{a}_\iota \neq \mathfrak{o}$, daß auch $\bigwedge \mathfrak{a}_\iota \neq \mathfrak{o}$ erfüllt ist. Mit Hilfe des Zorn'schen Lemmas ergibt sich daher, daß der Filterverband sogar ein atomarer Verband ist. Die Atome werden Ultrafilter genannt; sie sind feinste vom Nullfilter verschiedene Filter. Bekanntlich können Ultrafilter auch durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet werden.

1.1 *Ein Filter* $\mathfrak{u}$ *von* X *ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge* M *von* X *genau einer der beiden folgenden Fälle eintritt:* $M \in \mathfrak{u}$ *oder* $X \setminus M \in \mathfrak{u}$.

Einfachste Beispiele für Ultrafilter bilden die einpunktigen Hauptfilter

$$\bar{x} = \{M: x \in M\}.$$

Ultrafilter, die nicht diese einfache Form besitzen, werden freie Ultrafilter genannt. Ihre Struktur entzieht sich einer anschaulichen Beschreibung. Der folgende Satz gibt jedoch ein allgemeines Prinzip an, wie man aus gegebenen Ultrafiltern neue Ultrafilter gewinnen kann.

1.2 *Es sei* I *eine unendliche Indexmenge, und für jeden Index* $\iota \in I$ *sei* $\mathfrak{u}_\iota$ *ein Ultrafilter von* X. *Ferner sei* $\mathfrak{v}$ *ein Ultrafilter der Indexmenge* I. *Dann ist*

$$\mathfrak{w} := \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{\iota \in V} \mathfrak{u}_\iota$$

wieder ein Ultrafilter von X.

Beweis: Jedenfalls gilt $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{o}$, so daß in der Kennzeichnung aus Satz 1.1 höchstens einer der beiden Fälle eintreten kann. Es sei nun eine beliebige Menge M von X gegeben. Dann ist

$$I_M := \{\iota: M \in \mathfrak{u}_\iota\}$$

eine Teilmenge der Indexmenge I. Da $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter von I ist, folgt $I_M \in \mathfrak{v}$ oder $I \backslash I_M \in \mathfrak{v}$. Im ersten Fall gilt

$$M \in \bigvee_{\iota \in I_M} \mathfrak{u}_\iota$$

und daher erst recht $M \in \mathfrak{w}$. Wegen

$$I \backslash I_M = \{\iota: M \notin \mathfrak{u}_\iota\} = \{\iota: X \backslash M \in \mathfrak{u}_\iota\}$$

($\mathfrak{u}_\iota$ Ultrafilter!) erhält man im zweiten Fall analog

$$X \backslash M \in \bigvee_{\iota \in I \backslash I_M} \mathfrak{u}_\iota$$

und damit $X \backslash M \in \mathfrak{w}$.

Speziell kann man hierbei als Indexmenge die Menge X selbst wählen. Dann ist also $\mathfrak{v}$ wieder ein Ultrafilter von X, dem in den Punkten x seiner Filtermengen Ultrafilter $\mathfrak{u}_x$ angeheftet sind. Der beschriebene Vereinigungs- und Durchschnittsprozeß liefert dann einen Ultrafilter, der anscheinend eine kompliziertere Struktur besitzt. Zur Untersuchung derartiger Strukturunterschiede bieten sich Abbildungen zwischen Filtern an.

2. Abbildungen

Weiter bedeute F stets die Menge aller Abbildungen f: $X \to X$. Jede solche Punktabbildung f induziert in folgender Weise eine, ebenfalls mit f bezeichnete, Filterabbildung F: $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. Ist nämlich $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Filter von X, so ist das Mengensystem $\{f(A): A \in \mathfrak{a}\}$ eine Filterbasis, die einen mit $f(\mathfrak{a})$ bezeichneten Filter erzeugt:

$$f(\mathfrak{a}) := \overline{\{f(A): A \in \mathfrak{a}\}}.$$

Für die so gewonnenen Filterabbildungen ergibt sich unmittelbar der folgende Satz.

2.1 *Aus* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *folgt* $f(\mathfrak{a}) \leq f(\mathfrak{b})$.
$f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$.
$f(\bigvee \mathfrak{a}_\iota) = \bigvee f(\mathfrak{a}_\iota)$.
Ist $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, so ist auch* $f(\mathfrak{u})$ *ein Ultrafilter.*

Beweis: Es wird nur die letzte Behauptung bewiesen. Es gilt $f(\mathfrak{u}) \neq \mathfrak{o}$. Bei gegebenem M muß für die Urbildmenge $f^-(M)$ wegen Satz 1.1 einer der Fälle $f^-(M) \in \mathfrak{u}$ oder $X \setminus f^-(M) \in \mathfrak{u}$ erfüllt sein. Im ersten Fall folgt

$$M \supset f(f^-(M)) \in f(\mathfrak{u})$$

und daher erst recht $M \in f(\mathfrak{u})$. Im zweiten Fall erhält man wegen

$$X \setminus M \supset f(X \setminus f^-(M)) \in f(\mathfrak{u})$$

entsprechend $X \setminus M \in f(\mathfrak{u})$. •

Die Filterabbildungen f sind aber im allgemeinen nicht mit der Durchschnittsbildung bei Filtern (auch nicht mit endlichen Durchschnitten) vertauschbar. Zum Beispiel sei f durch $f(x) = z$ für alle $x \in X$ definiert. Für zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ gilt dann $\bar{x} \wedge \bar{y} = \mathfrak{o}$ und daher $f(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \mathfrak{o}$. Andererseits erhält man $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \bar{z}$ und daher $f(\bar{x}) \wedge f(\bar{y}) = \bar{z} \neq \mathfrak{o}$.

Eine interessante Eigenschaft dieser Filterabbildungen im Zusammenhang mit Ultrafiltern enthält der folgende Satz.

2.2 *Es sei* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter von* X, *und für die Abbildung* $f \in F$ *gelte* $f(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. *Dann ist* f *auf einer Filtermenge von* $\mathfrak{u}$ *die Identität; d.h. es gibt ein* $U \in \mathfrak{u}$ *mit* $f(x) = x$ *für alle* $x \in U$.

Der Beweis dieses bekannten Satzes ist recht aufwendig (vgl. z.B. P. Sperner [8]).

Die folgende Definition dient der Kennzeichnung von Ultrafiltern, die ein besonders einfaches Verhalten gegenüber Abbildungen aufweisen.

Definition 2a: *Für einen beliebigen Filter* $\mathfrak{a}$ *sei*

$$\varkappa(\mathfrak{a}) := \min \{|A| : A \in \mathfrak{a}\}.$$

Ein Ultrafilter $\mathfrak{u}$ *von* X *soll einfach genannt werden, wenn für jede Abbildung* $f \in F$ *eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) $\varkappa(f(\mathfrak{u})) < k$.

(2) *Es gibt eine Filtermenge* $U \in \mathfrak{u}$, *auf der* f *injektiv ist.*

Im Fall einer abzählbaren Grundmenge sind die einfachen Ultrafilter gerade die schon früher untersuchten primitiven Ultrafilter oder p-Punkte (vgl. z.B. P. Sperner [8]). Eigenschaft (1) besagt in diesem Fall, daß $f(\mathfrak{u})$ ein einpunktiger Hauptfilter ist. Einer anderen Kennzeichnung der einfachen Ultrafilter dient die folgende Definition.

Definition 2b: *Es sei* $\mathfrak{Z} = \{Z_x : x \in X\}$ *eine Zerlegung von* X *in paarweise punktfremde Teilmengen* $Z_x \neq \emptyset$, *und* $\mathfrak{a}$ *sei ein beliebiger Filter von* X. *Dann bedeute* $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{a})$, *daß eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist:*

(1) *Es gibt eine Teilmenge* T *von* X *mit* $|T| < k$ *und mit* $\bigcup \{Z_x : x \in T\} \in \mathfrak{a}$.

(2) *Es gibt eine Filtermenge* $A \in \mathfrak{a}$ *mit* $|A \cap Z_x| \leq 1$ *für alle* $x \in X$.

2.3 *Ein Ultrafilter* $\mathfrak{u}$ *ist genau dann einfach, wenn* $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{u})$ *für alle Zerlegungen* $\mathfrak{Z}$ *der in Definition 2b angegebenen Art gilt.*

Beweis: Es kann $\varkappa(\mathfrak{u}) = k$ vorausgesetzt werden. Zunächst sei nun $\mathfrak{u}$ einfach, und $\mathfrak{Z} = \{Z_x: x \in X\}$ sei eine gegebene Zerlegung.

Durch $f(y) = x$ für alle $y \in Z_x$ wird dann eine Abbildung $f \in F$ definiert. Gilt $\varkappa(f(\mathfrak{u})) < k$, dann gibt es ein $U \in \mathfrak{u}$ mit $|f(U)| < k$, und mit $T = f(U)$ ist die Eigenschaft (1) aus Definition 2b erfüllt. Andernfalls gibt es ein $U \in \mathfrak{u}$, auf dem f injektiv ist. Wegen $f(Z_x) = \{x\}$ muß dann aber $|U \cap Z_x| \leq 1$ für alle $x \in X$, also Eigenschaft (2) erfüllt sein.

Umgekehrt gelte $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{u})$ für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$, und $f \in F$ sei eine gegebene Abbildung mit $\varkappa(f(\mathfrak{u})) = k$. Dann gibt es eine Bijektion $g: X \to f(X)$, und durch $Z_x := f^-(g(x))$ wird eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ bestimmt. Wegen $\varkappa(f(\mathfrak{u})) = k$ muß in $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{u})$ die Eigenschaft (2) erfüllt sein; und sie besagt, daß f auf einer Filtermenge von $\mathfrak{u}$ injektiv ist. ●

Dem Existenznachweis einfacher Ultrafilter dient der folgende Satz als Vorbereitung.

2.4 *Es sei* $\mathfrak{Z} = \{Z_\iota: \iota < k\}$ *eine Zerlegung von* X *in paarweise punktfremde Mengen* $Z_\iota \neq \emptyset$. *Ferner sei* $\mathfrak{b}$ *ein Filter von* X *mit* $\varkappa(\mathfrak{b}) = k$, *der eine Filterbasis* $\mathfrak{B}$ *mit* $|\mathfrak{B}| \leq k$ *besitzt.* ($\mathfrak{b}$ *ist kein Ultrafilter!) Dann gibt es zu* $\mathfrak{b}$ *einen Filter* $\hat{\mathfrak{b}}$ *mit* $\hat{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{b}$ *und* $E(\mathfrak{Z}, \hat{\mathfrak{b}})$, *der außerdem dieselben Eigenschaften wie* $\mathfrak{b}$ *besitzt.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{B} = \{B_\sigma: \sigma < k\}$. Sollte $\mathfrak{B}$ eine kleinere Mächtigkeit als k besitzen, kann man $\mathfrak{B}$ so auffüllen, daß es zu zwei Indizes $\sigma, \tau < k$ stets ein $\tau' > \tau$ mit $B_{\tau'} \subset B_\sigma$ gibt.

Fall 1: *Es gibt eine Teilmenge* $T \subset k$ *mit* $|T| < k$, *so daß mit* $M = \bigcup\{Z_\iota: \iota \in T\}$ *noch* $\varkappa(\mathfrak{b} \wedge \bar{M}) = k$ *erfüllt ist.*

Dann sei $\hat{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b} \wedge \bar{M}$. Unmittelbar folgt $\hat{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{b}$ und $\varkappa(\hat{\mathfrak{b}}) = k$. Weiter ist $\hat{\mathfrak{B}} = \{B_\sigma \cap M: \sigma < k\}$ eine Basis von $\hat{\mathfrak{b}}$ mit $|\hat{\mathfrak{B}}| \leq k$. Schließlich besagt die Kennzeichnung dieses Falls, daß die erste Alternative von $E(\mathfrak{Z}, \hat{\mathfrak{b}})$ erfüllt ist.

Gilt Fall 1 nicht, so folgt

Fall 2: *Für jede Teilmenge* $T \subset k$ *mit* $|T| < k$ *ist*
$\varkappa(\mathfrak{b} \wedge \overline{\bigcup\{Z_\iota: \iota \in T\}}) < k$.

Es werden nun für alle $\sigma < k$ paarweise verschiedene Indizes ι_σ und Punkte $x_\sigma \in Z_{\iota_\sigma} \cap B_\sigma$ induktiv definiert.

Bei gegebenem $\sigma < k$ seien bereits ι_τ und x_τ für $\tau < \sigma$ entsprechend konstruiert. Dann sei $T_\sigma := \{\iota_\tau: \tau < \sigma\}$ und

$$\iota_\sigma := \min\{\iota: \iota < k, \iota \notin T_\sigma, Z_\iota \cap B_\sigma \neq \emptyset\}.$$

Dieses Minimum existiert: Andernfalls würde nämlich $Z_\iota \cap B_\sigma = \emptyset$ für alle $\iota < k$ mit $\iota \notin T_\sigma$ und damit $B_\sigma \subset V := \bigcup\{Z_\lambda: \lambda \in T_\sigma\}$ gelten. Wegen $|T_\sigma| < k$ würde dann aus der Kennzeichnung dieses Falls $\varkappa(\mathfrak{b} \wedge \bar{V}) < k$ folgen. Andererseits gilt aber wegen $\mathfrak{b} \leq \bar{B}_\sigma \leq \bar{V}$ auch $\mathfrak{b} \wedge \bar{V} = \mathfrak{b}$, woraus der Widerspruch $\varkappa(\mathfrak{b}) < k$ resultieren würde.

Damit ist ι_σ mit $Z_{\iota_\sigma} \cap B_\sigma \neq \emptyset$ definiert, und man kann einen Punkt $x_\sigma \in Z_{\iota_\sigma} \cap B_\sigma$ fest auswählen. Jetzt sind die Folgen (ι_σ) und (x_σ) konstruiert, und es sei weiter

$$M := \{x_\sigma\colon \sigma < k\}, \quad \hat{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b} \wedge \bar{M}.$$

Es ist wieder $\hat{\mathfrak{B}} := \{B_\sigma \cap M\colon \sigma < k\}$ eine Basis von $\hat{\mathfrak{b}}$ mit $|\hat{\mathfrak{B}}| \leq k$, und $\hat{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{b}$ folgt aus der Definition von $\hat{\mathfrak{b}}$. Da die Indizes paarweise verschieden sind, ergibt sich wegen $x_\sigma \in Z_{\iota_\sigma}$

$$M \cap Z_\iota = \begin{cases} \{x_\sigma\} & \textit{für } \iota = \iota_\sigma \\ \emptyset & \textit{sonst} \end{cases}.$$

Die zweite Alternative von $E(\mathfrak{Z}, \hat{\mathfrak{b}})$ ist daher mit der Filtermenge M von $\hat{\mathfrak{b}}$ erfüllt. Nachzuweisen ist also nur noch $\varkappa(\hat{\mathfrak{b}}) = k$.

Aus $\varkappa(\hat{\mathfrak{b}}) < k$ folgt die Existenz eines $\sigma < k$ mit $|B_\sigma \cap M| < k$. Daher gibt es ein $\tau < k$ mit $x_{\tau'} \notin B_\sigma$ für alle $\tau' > \tau$. Andererseits gibt es aber ein $\tau' > \tau$ mit $B_{\tau'} \subset B_\sigma$. Wegen $x_{\tau'} \in B_{\tau'} \subset B_\sigma$ ist dies ein Widerspruch. ●

2.5 *Es sei* $\mathfrak{c}$ *ein Filter von* X *mit* $\varkappa(\mathfrak{c}) = k$*, der eine Filterbasis* $\mathfrak{C}$ *mit* $|\mathfrak{C}| \leq k$ *besitzt. Ferner sei für alle* $\iota < 2^k$ *ein Ultrafilter* $\mathfrak{u}_\iota$ *beliebig gegeben. Dann gibt es einen freien einfachen Ultrafilter* $\mathfrak{v}$ *mit* $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{c}$ *und mit* $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{u}_\iota$ *für alle* $\iota < 2^k$.

Beweis: Es sei $\{\mathfrak{Z}_\iota\colon \iota < 2^k\}$ eine Wohlordnung aller Zerlegungen von X der Form $\mathfrak{Z}_\iota = \{Z_x^\iota\colon x \in X\}$. Es werden nun für $\iota < 2^k$ Filter $\mathfrak{a}_\iota$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

(a) *Aus* $\iota_1 < \iota_2$ *folgt* $\mathfrak{c} \geq \mathfrak{a}_{\iota_1} \geq \mathfrak{a}_{\iota_2}$.
(b) $\varkappa(\mathfrak{a}_\iota) = k$.
(c) $\mathfrak{a}_\iota$ *besitzt eine Filterbasis* $\mathfrak{A}_\iota$ *mit* $|\mathfrak{A}_\iota| \leq k$.
(d) *Es gilt* $E(\mathfrak{Z}_\iota, \mathfrak{a}_\iota)$.
(e) $\mathfrak{a}_\iota \wedge \mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{o}$ *für alle* $\lambda \leq \iota$.

Aus der Definition der Eigenschaft E, aus $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{a})$ und aus $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{a}'$ folgt unmittelbar $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{a}')$. Wegen (a) gilt daher in (d) sogar $E(\mathfrak{Z}_\lambda, \mathfrak{a}_\iota)$ für alle $\lambda \leq \iota$.

Es sei nun $\iota < 2^k$, und für $\lambda < \iota$ sei $\mathfrak{a}_\lambda$ bereits entsprechend konstruiert. Dann sei

$$\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{c} \quad (\iota = 0), \quad \mathfrak{b}_\iota := \bigwedge_{\lambda < \iota} \mathfrak{a}_\lambda \quad (\iota > 0).$$

Wegen $\varkappa(\mathfrak{c}) = \varkappa(\mathfrak{a}_\lambda) = k$ gilt dann auch $\varkappa(\mathfrak{b}_\iota) = k$. Weiter ist im Fall $\iota = 0$ wegen $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}$ dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{b}_0$ mit $|\mathfrak{B}| \leq k$. Im Fall $\iota > 0$ ist bei Berücksichtigung von (a) und (c) jedenfalls $\mathfrak{B} = \bigcup \{\mathfrak{A}_\lambda\colon \lambda < \iota\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{b}_\iota$. Wegen $\iota < 2^k$, also $|\iota| \leq k$ (Kontinuumshypothese) folgt $|\mathfrak{B}| \leq k \cdot k = k$. Außerdem besitzt $\mathfrak{b}_\iota$ im Fall $\iota > 0$ wegen $\mathfrak{b}_\iota \leq \mathfrak{a}_\lambda$ die Eigenschaft $E(\mathfrak{Z}_\lambda, \mathfrak{b}_\iota)$ für alle $\lambda < \iota$, und ebenso ergibt sich $\mathfrak{b}_\iota \wedge \mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{o}$ für $\lambda < \iota$.

Nach Satz 2.4 bestimmen $\mathfrak{b}_\iota$ und $\mathfrak{Z}_\iota$ einen Filter $\hat{\mathfrak{b}}_\iota$ mit $\hat{\mathfrak{b}}_\iota \leq \mathfrak{b}_\iota$, $E(\mathfrak{Z}_\iota, \hat{\mathfrak{b}}_\iota)$, $\varkappa(\hat{\mathfrak{b}}_\iota) \leq k$ und mit einer Filterbasis einer Mächtigkeit $\leq k$. Es folgt außerdem $\hat{\mathfrak{b}}_\iota \leq \mathfrak{b}_\iota \leq \mathfrak{a}_\lambda \leq \mathfrak{c}$ für $\lambda < \iota$ bzw. $\hat{\mathfrak{b}}_0 \leq \mathfrak{c}$ und $E(\mathfrak{Z}_\lambda, \hat{\mathfrak{b}}_\iota)$ für $\lambda \leq \iota$. Da Filterbasen eines Ultrafilters $\mathfrak{u}$ mit $\varkappa(\mathfrak{u}) = k$ die Mächtigkeit 2^k besitzen, kann $\hat{\mathfrak{b}}_\iota$ kein Ultrafilter sein. Daher gibt es ein $U_\iota \in \mathfrak{u}_\iota$ mit $\varkappa(\hat{\mathfrak{b}}_\iota \wedge \overline{(X \setminus U_\iota)}) = k$. Der durch

$$\mathfrak{a}_\iota := \hat{\mathfrak{b}}_\iota \wedge \overline{(X \setminus U_\iota)}$$

definierte Filter besitzt dann wieder die Eigenschaften (a)−(e). Es folgt, daß

$$\mathfrak{v} := \bigwedge \{\mathfrak{a}_\iota : \iota < 2^k\}$$

die Eigenschaft $E(\mathfrak{Z}_\iota, \mathfrak{v})$ für alle Zerlegungen besitzt und daß $\varkappa(\mathfrak{v}) = k$ gilt. Daher kann $\mathfrak{v}$ zu einem freien Ultrafilter $\mathfrak{v}^*$ mit denselben Eigenschaften verfeinert werden, und nach Satz 2.3 ist $\mathfrak{v}^*$ ein einfacher Ultrafilter. •

Im letzten Beweisschritt mußte der Filter $\mathfrak{v}$ noch zu einem Ultrafilter verfeinert werden. Dieser Schritt kann jedoch entfallen, wenn man in der Voraussetzung des Satzes von dem Filter $\mathfrak{c}$ sogar $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{k}$ fordert, wobei

$$\mathfrak{k} := \{K : |X \setminus K| < k\}$$

der Filter der Komplemente von Mengen niederer Mächtigkeit ist. Dann gilt auch $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{k}$, und der folgende Satz zeigt, daß $\mathfrak{v}$ schon selbst ein Ultrafilter ist.

2.6 *Es sei $\mathfrak{v}$ ein Filter von X mit $\varkappa(\mathfrak{v}) = k$, $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{k}$ und mit der Eigenschaft $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{v})$ für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ mit $|\mathfrak{Z}| = k$. Dann ist $\mathfrak{v}$ ein einfacher Ultrafilter.*

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter ist. Dazu sei eine Teilmenge M von X gegeben. Zu zeigen ist $M \in \mathfrak{v}$ oder $X \setminus M \in \mathfrak{v}$. Jedenfalls gilt $|M| = k$ oder $|X \setminus M| = k$. Es genügt daher, den Fall $|M| = k$ und $X \setminus M \neq \emptyset$ zu behandeln.

$$\mathfrak{Z} := \{X \setminus M\} \cup \{\{x\} : x \in M\}$$

ist eine Zerlegung mit $|\mathfrak{Z}| = k$. Wegen $E(\mathfrak{Z}, \mathfrak{v})$ gilt dann einer der beiden folgenden Fälle:

(a) *Es gibt eine Teilmenge T von X mit $|T| = k$ und*
$V = \bigcup \{\{x\} : x \in T\} \cup (X \setminus M) \in \mathfrak{v}$.

(b) *Es gibt ein $V \in \mathfrak{v}$ mit $|V \cap Z| \leq 1$ für alle $Z \in \mathfrak{Z}$.*

Im Fall (a) folgt $|M \cap V| \leq |T| < k$ und wegen $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{k}$ daher $X \setminus M \in \mathfrak{v}$. Tritt Fall (b) ein, so gilt speziell $|V \cap (X \setminus M)| \leq 1$ und wieder wegen $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{k}$ dann $M \in \mathfrak{v}$. •

Es ist naheliegend, einen Ultrafilter $\mathfrak{u}$ einfacher als einen Ultrafilter $\mathfrak{v}$ zu nennen, wenn es eine Abbildung $f \in F$ mit $f(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$ gibt. Diese Relation ist eine Präordnung, bei der (wenn man sich auf Ultrafilter $\mathfrak{u}$ mit $\varkappa(\mathfrak{u}) = k$ beschränkt) die einfachen Ultrafilter dann auch wirklich einfachste Filter sind. Und auch im Beispiel am Ende des ersten Abschnitts ist $\mathfrak{v}$ einfacher als $\mathfrak{w}$. Sonst aber ist diese Relation nur bedingt nützlich, weil bei ihr zu wenig Ultrafilter vergleichbar sind. Ziel der weiteren Betrachtungen ist daher, den Bereich der Filterabbildungen zu vergrößern.

3. Boole'sche Homomorphismen

In diesem Abschnitt werden Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ des Potenzmengenverbandes von X betrachtet.

Definition 3a: *φ heißt Homomorphismus, wenn für alle Teilmengen A, B von X*

$$\varphi(A \cup B) = \varphi A \cup \varphi B \quad \textit{und} \quad \varphi(A \cap B) = \varphi A \cap \varphi B$$

erfüllt ist. Weiter wird φ *ein Boole'scher Homomorphismus* (B-*Homomorphismus*) *genannt, wenn außerdem für alle Teilmengen* A *von* X

$$\varphi(X \setminus A) = X \setminus \varphi A$$

gilt.

Unmittelbar ergibt sich

3.1 *Ist* φ *ein Homomorphismus, so folgt aus* $A \subset B$ *auch* $\varphi A \subset \varphi B$. *Für* B-*Homomorphismen gilt außerdem*

$$\varphi\emptyset = \emptyset, \quad \varphi X = X, \quad \varphi(A \setminus B) = (\varphi A) \setminus (\varphi B).$$

Punktabbildungen $f \in F$ bestimmen Homomorphismen durch Urbilder: Definiert man für beliebige Teilmengen A von X

$$\varphi_f A := f^{-}(A),$$

so ist φ_f sogar ein B-Homomorphismus.

Ist φ ein Homomorphismus und $\mathfrak{a}$ ein Filter von X, so ist $\{\varphi A \colon A \in \mathfrak{a}\}$ im allgemeinen kein Filter, wohl aber eine Filterbasis. Den von ihr erzeugten Filter kann man daher als Bildfilter von $\mathfrak{a}$ bei der durch φ bestimmten Filterabbildung auffassen, die zur Vereinfachung wieder mit φ bezeichnet werden soll.

Definition 3b: $\varphi(\mathfrak{a}) := \overline{\{\varphi A \colon A \in \mathfrak{a}\}}$.

3.2 *Für die von einem Homomorphismus* φ *induzierte Filterabbildung gilt*

$$\varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi A)}, \quad \varphi(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}) \vee \varphi(\mathfrak{b}), \quad \varphi(\wedge \mathfrak{a}_\iota) = \wedge \varphi(\mathfrak{a}_\iota).$$

Aus $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *folgt* $\varphi(\mathfrak{a}) \leq \varphi(\mathfrak{b})$.

Ist hierbei φ *ein* B-*Homomorphismus, so gilt außerdem* $\varphi(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ *und* $\varphi(\bar{X}) = \bar{X}$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich durch elementare Rechnungen. Die Vertauschbarkeit von φ auch mit Durchschnitten beliebig vieler Filter beruht darauf, daß die Mengen des Durchschnittsfilters durch nur endliche Durchschnittsbildungen gewonnen werden. Hingegen ist φ im allgemeinen nicht mit der Vereinigungsbildung unendlich vieler Filter vertauschbar.

3.3 *Ist* φ *ein surjektiver* B-*Homomorphismus und ist* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, so ist auch* $\varphi(\mathfrak{u})$ *ein Ultrafilter oder es gilt* $\varphi(\mathfrak{u}) = \mathfrak{o}$.

Beweis: Gegeben sei eine Teilmenge M′ von X. Da φ surjektiv ist, gilt $M' = \varphi M$ mit einer geeigneten Menge M und auch $X \setminus M' = X \setminus \varphi M = \varphi(X \setminus M)$. Da $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter ist, folgt $M \in \mathfrak{u}$ oder $X \setminus M \in \mathfrak{u}$ und daher im ersten Fall $M' = \varphi M \in \varphi(\mathfrak{u})$ und im zweiten Fall $X \setminus M' = \varphi(X \setminus M) \in \varphi(\mathfrak{u})$. Gilt außerdem $\varphi(\mathfrak{u}) \neq \mathfrak{o}$, so kann auch nur genau eine dieser beiden Möglichkeiten eintreten. ●

Es sei φ ein B-Homomorphismus. Bei gegebenem Filter $\mathfrak{a}'$ von X ist das Mengensystem $\{A \colon \varphi A \in \mathfrak{a}'\}$ nicht leer, weil ja $\varphi X = X \in \mathfrak{a}'$ gilt. Einfache Rechnungen zeigen dann, daß dieses System sogar ein Filter ist.

Definition 3c: *Es sei* φ *ein* B-*Homomorphismus. Dann heißt*

$$\varphi^{-}(\mathfrak{a}') := \{A: \varphi A \in \mathfrak{a}'\}$$

der Urbildfilter von $\mathfrak{a}'$.

Es sind nur Urbildfilter, nicht aber Urbildmengen definiert.

Für den von einer Menge A erzeugten Hauptfilter ist $\varphi^{-}(\bar{A}) = \{B: \varphi B \supset A\}$ im allgemeinen kein Hauptfilter; und dies gilt insbesondere für $\varphi^{-}(X)$. Lediglich für den Nullfilter erhält man $\varphi^{-}(\mathfrak{o}) = \{B: \varphi B \supset \emptyset\} = \mathfrak{o}$.

3.4 *Es sei* φ *ein* B-*Homomorphismus. Dann gilt:*

Aus $\mathfrak{a}' \leq \mathfrak{b}'$ *folgt* $\varphi^{-}(\mathfrak{a}') \leq \varphi^{-}(\mathfrak{b}')$.

$\varphi^{-}(\bigvee \mathfrak{a}'_\iota) = \bigvee \varphi^{-}(\mathfrak{a}'_\iota)$.

Ist φ *sogar surjektiv, so gilt auch*

$$\varphi^{-}(\bigwedge \mathfrak{a}'_\iota) = \bigwedge \varphi^{-}(\mathfrak{a}'_\iota).$$

Beweis: Die ersten Behauptungen sind elementar nachzurechnen. Es wird daher nur die letzte Gleichung bewiesen.

$\varphi^{-}(\bigwedge \mathfrak{a}'_\iota) \leq \bigwedge \varphi^{-}(\mathfrak{a}'_\iota)$ ist trivial. Weiter sei $B \in \varphi^{-}(\bigwedge \mathfrak{a}'_\iota)$. Zu zeigen ist $B \in \bigwedge \varphi^{-}(\mathfrak{a}'_\iota)$. Aus der Voraussetzung folgt $\varphi B \in \bigwedge \mathfrak{a}'_\iota$, also $B \supset A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_n}$ mit $A'_{\iota_\nu} \in \mathfrak{a}'_{\iota_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Da φ surjektiv ist, gilt $A'_{\iota_\nu} = \varphi A_{\iota_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Dann sei

$$D := (A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n}) \setminus B.$$

Es folgt

$$\varphi D = (A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_n}) \setminus \varphi B \subset (A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_n}) \setminus (A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_n}) = \emptyset.$$

Setzt man nun $A^*_{\iota_\nu} := A_{\iota_\nu} \setminus D$, so folgt $\varphi A^*_{\iota_\nu} = \varphi A_{\iota_\nu} \setminus \varphi D = A'_{\iota_\nu}$, also $A^*_{\iota_\nu} \in \varphi^{-}(\mathfrak{a}'_{\iota_\nu})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, und man erhält

$$A^*_{\iota_1} \cap \ldots \cap A^*_{\iota_n} = (A_{\iota_1} \setminus D) \cap \ldots \cap (A_{\iota_n} \setminus D) = A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n} \cap B \subset B,$$

woraus sich $B \in \bigwedge \varphi^{-}(\mathfrak{a}'_\iota)$ ergibt. ●

3.5 *Für jeden* B-*Homomorphismus* φ *und für beliebige Filter* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ *von* X *gilt*

$$\varphi^{-}(\varphi(\mathfrak{a})) \leq \mathfrak{a} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{a}' \leq \varphi(\varphi^{-}(\mathfrak{a}')).$$

Besitzt $\mathfrak{a}'$ *eine Basis im Bild von* φ *(z. B. wenn* φ *surjektiv ist), so gilt sogar*

$$\mathfrak{a}' = \varphi(\varphi^{-}(\mathfrak{a}')).$$

Beweis: Aus $A \in \mathfrak{a}$ folgt $\varphi A \in \varphi(\mathfrak{a})$ und daher $A \in \varphi^{-}(\varphi(\mathfrak{a}))$. Das ist die erste Behauptung.

Aus $B' \in \varphi(\varphi^{-}(\mathfrak{a}'))$ ergibt sich die Existenz einer Menge A mit $B' \supset \varphi A$ und $\varphi A \in \mathfrak{a}'$, zusammen also $B' \in \mathfrak{a}'$ und damit die zweite Behauptung. Besitzt schließlich $\mathfrak{a}'$ eine Basis im Bild von φ, so gibt es zu $B' \in \mathfrak{a}'$ eine Menge A mit $B' \supset \varphi A$ und $\varphi A \in \mathfrak{a}'$, woraus umgekehrt $B' \in \varphi(\varphi^{-}(\mathfrak{a}'))$ folgt. ●

3.6 *Ist* φ *ein* B-*Homomorphismus und ist* $\mathfrak{u}'$ *ein Ultrafilter, so ist auch* $\varphi^{-}(\mathfrak{u}')$ *ein Ultrafilter.*

Beweis: Aus $\varphi^{-}(\mathfrak{u}') = \mathfrak{o}$ würde der Widerspruch $\emptyset = \varphi\emptyset \in \mathfrak{u}'$ folgen. Weil $\mathfrak{u}'$ ein Ultrafilter ist, gilt bei gegebener Menge M entweder $\varphi M \in \mathfrak{u}'$ oder $\varphi(X \backslash M) = X \backslash \varphi M \in \mathfrak{u}'$. Im ersten Fall folgt $M \in \varphi^{-}(\mathfrak{u}')$, im zweiten $X \backslash M \in \varphi^{-}(\mathfrak{u}')$. •

Der folgende Satz gibt nun einen Überblick über alle möglichen B-Homomorphismen und über ihre Konstruktion.

3.7 *Es sei φ ein B-Homomorphismus. Für alle $x \in X$ ist dann $\mathfrak{w}_x^\varphi := \varphi^{-}(\bar{x})$ ein Ultrafilter, und für beliebige Teilmengen M von X gilt*

$$\varphi M = \{x\colon M \in \mathfrak{w}_x^\varphi\}.$$

Umgekehrt sei jedem $x \in X$ ein Ultrafilter $\mathfrak{w}_x$ beliebig zugeordnet, und die Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ sei durch

$$\varphi M = \{x\colon M \in \mathfrak{w}_x\}$$

definiert. Dann ist φ ein B-Homomorphismus mit $\mathfrak{w}_x^\varphi = \mathfrak{w}_x$ für alle $x \in X$.

Beweis: Nach dem vorangehenden Satz ist $\mathfrak{w}_x^\varphi = \varphi^{-}(\bar{x})$ ein Ultrafilter. Ferner ist $x \in \varphi M$ gleichwertig mit $\varphi M \in \bar{x}$, also mit $M \in \varphi^{-}(\bar{x}) = \mathfrak{w}_x^\varphi$.

Umgekehrt seien die Ultrafilter $\mathfrak{w}_x$ gegeben, und φ sei in der angegebenen Weise definiert. Es folgt

$$\varphi(A \cap B) = \{x\colon A \cap B \in \mathfrak{w}_x\} = \{x\colon A \in \mathfrak{w}_x\} \cap \{x\colon B \in \mathfrak{w}_x\} = \varphi A \cap \varphi B,$$
$$\varphi(X \backslash A) = \{x\colon X \backslash A \in \mathfrak{w}_x\} = \{x\colon A \notin \mathfrak{w}_x\} = X \backslash \varphi A.$$

Die Vertauschbarkeit mit der Vereinigungsbildung ergibt sich hieraus wegen $A \cup B = X \backslash ((X \backslash A) \cap (X \backslash B))$. Damit ist φ ein B-Homomorphismus. Für ihn erhält man schließlich

$$\mathfrak{w}_x^\varphi = \varphi^{-}(\bar{x}) = \{W\colon x \in \varphi W\} = \{W\colon W \in \mathfrak{w}_x\} = \mathfrak{w}_x. \qquad \bullet$$

Ordnet man jedem $x \in X$ einen freien Ultrafilter $\mathfrak{w}_x$ zu, so wird dadurch ein B-Homomorphismus φ definiert, bei dem $\varphi(\bar{x}) = \mathfrak{o}$ für alle $x \in X$ gilt. Es folgt

$$\bar{X} = \overline{\varphi X} = \varphi \bar{X} = \varphi\,(\vee\{\bar{x}\colon x \in X\}) \neq \vee\{\varphi(\bar{x})\colon x \in X\} = \mathfrak{o}.$$

Dies ist ein Beispiel für die vorherige Bemerkung, daß ein B-Homomorphismus im allgemeinen nicht mit unendlichen Filtervereinigungen vertauschbar ist.

3.8 *Es sei φ ein B-Homomorphismus. Dann sind folgende Aussagen paarweise gleichwertig:*

(1) *φ ist injektiv.*
(2) *Die von φ induzierte Filterabbildung ist injektiv.*
(3) *Es gibt ein $f \in F$ mit $\mathfrak{w}_{f(x)}^\varphi = \bar{x}$ für alle $x \in X$.*

Beweis: φ sei injektiv. Aus $\varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{b})$ folgt, daß es zu jedem $A \in \mathfrak{a}$ ein $B \in \mathfrak{b}$ mit $\varphi A = \varphi B$ gibt und ebenso zu jedem $B \in \mathfrak{b}$ ein $A \in \mathfrak{a}$. Wegen der Injektivität von φ folgt aber aus $\varphi A = \varphi B$ stets $A = B$ und daher $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Die induzierte Filterabbildung ist also ebenfalls injektiv. Umgekehrt sei dies vorausgesetzt. Aus $\varphi A = \varphi B$ ergibt sich zunächst $\varphi(\bar{A}) = \overline{\varphi A} = \overline{\varphi B} = \varphi\,(\bar{B})$ und daher $\bar{A} = \bar{B}$, also $A = B$. Dies ist die Gleichwertigkeit von (1) und (2).

Zweitens sei (1) vorausgesetzt, und $x \in X$ sei gegeben. Wegen $\emptyset \neq \{x\}$ folgt

$$\emptyset = \varphi\emptyset \neq \varphi\{x\} = \{y\colon \{x\} \in \mathfrak{w}_y^\varphi\}. \tag{*}$$

Nun ist aber $\{x\} \in \mathfrak{w}_y^\varphi$ gleichwertig mit $\mathfrak{w}_y^\varphi = \bar{x}$. Und da es wegen (*) zu jedem x ein y_x mit $\mathfrak{w}_{y_x}^\varphi = \bar{x}$ gibt, folgt (3) mit der durch $f(x) = y_x$ definierten Abbildung.

Schließlich sei (3) vorausgesetzt und außerdem $A \neq B$. Dann gibt es ein $x \in A \cap (X \backslash B)$ oder ein $x \in B \cap (X \backslash A)$. Wegen (3) folgt im ersten Fall $f(x) \in \varphi A$, $f(x) \notin \varphi B$ und im zweiten Fall $f(x) \in \varphi B$, $f(x) \notin \varphi A$, in jedem Fall also $\varphi A \neq \varphi B$ und damit (1). ●

3.9 *Es sei* φ *ein* B-*Homomorphismus. Dann sind folgende Aussagen paarweise gleichwertig:*

(1) φ *ist surjektiv.*

(2) *Die von* φ *induzierte Filterabbildung ist surjektiv.*

(3) *Für jede Teilmenge* M *von* X *gilt*
$$\bigvee_{x \in M} \mathfrak{w}_x^\varphi \wedge \bigvee_{y \in X \backslash M} \mathfrak{w}_y^\varphi = \mathfrak{o}.$$

(4) *Es gibt eine Zerlegung* $\{Z_x\colon x \in X\}$ *von* X *mit* $Z_x \in \mathfrak{w}_x^\varphi$ *für alle* $x \in X$.

Beweis: Es sei φ surjektiv. Für einen beliebigen Filter $\mathfrak{a}'$ gilt nach Satz 3.5 dann $\mathfrak{a}' = \varphi(\varphi^-(\mathfrak{a}'))$, also (2). Umgekehrt existiert bei Voraussetzung von (2) zu einer gegebenen Menge A′ ein Filter $\mathfrak{a}$ mit $\varphi(\mathfrak{a}) = \overline{A'}$. Dann aber gibt es ein $A \in \mathfrak{a}$ mit $\varphi A = A'$; es ist also (1) erfüllt. Damit ist die Gleichwertigkeit von (1) und (2) gezeigt.

Es sei weiter (1) vorausgesetzt. Zum Beweis von (3) sei eine Teilmenge M von X gegeben, von der außerdem $M \neq \emptyset$ und $M \neq X$ angenommen werden kann, da sonst die Behauptung trivial ist. Dann gibt es ein A mit $M = \varphi A$ und daher $X \backslash M = \varphi(X \backslash A)$. Aus $x \in M$ folgt $A \in \mathfrak{w}_x^\varphi$ und aus $y \in X \backslash M$ entsprechend $X \backslash A \in \mathfrak{w}_y^\varphi$. Damit ergibt sich

$$\bigvee_{x \in M} \mathfrak{w}_x^\varphi \wedge \bigvee_{y \in X \backslash M} \mathfrak{w}_y^\varphi \leq \bar{A} \wedge \overline{(X \backslash A)} = \mathfrak{o},$$

also die Behauptung aus (3).

Im nächsten Beweisschritt sei (3) vorausgesetzt. Zum Beweis von (4) sei $\{x_\iota\colon \iota < k\}$ eine Wohlordnung von X. Es sollen dann induktiv Mengen $Z_\iota \in \mathfrak{w}_{x_\iota}^\varphi$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert werden:

(a) *Für alle* $\lambda < k$ *ist* $\{Z_\iota\colon \iota < \lambda\}$ *ein System aus paarweise punktfremden Mengen.*

(b) *Für alle* $\lambda < k$ *gilt* $X \backslash \bigcup_{\iota < \lambda} A_\iota \in \mathfrak{w}_{x_\mu}^\varphi$ *für alle* μ *mit* $\lambda \leq \mu < k$.

Nach eventueller Vergrößerung von Mengen Z_ι ist dann $\{Z_\iota\colon \iota < k\}$ wegen (a) eine Zerlegung der in (4) behaupteten Art.

Aus (3) folgt

$$\mathfrak{w}_{x_0}^\varphi \wedge \bigvee_{0 < \mu < k} \mathfrak{w}_{x_\mu}^\varphi = \mathfrak{o}.$$

Daher existiert ein $Z_0 \in \mathfrak{w}_{x_0}^\varphi$ mit $X \backslash Z_0 \in \mathfrak{w}_{x_\mu}^\varphi$ für alle μ mit $0 < \mu < k$. Dies ist der Induktionsbeginn ($\lambda = 1$).

Jetzt sei $\lambda > 1$, und für $\iota < \lambda$ sei Z_ι bereits entsprechend konstruiert. Wieder folgt aus (3)

$$\bigvee_{\iota<\lambda} \mathfrak{w}^{\varphi}_{x_\iota} \wedge \bigvee_{\lambda\leq\mu<k} \mathfrak{w}^{\varphi}_{x_\mu} = \mathfrak{o}, \qquad (*)$$

und wegen (b) gilt

$$\bigvee_{\lambda\leq\mu<k} \mathfrak{w}^{\varphi}_{x_\mu} \leq \overline{X \setminus \bigvee_{\iota<\lambda} Z_\iota}.$$

Wegen (*) gibt es außerdem ein $Z_\lambda \in \mathfrak{w}^{\varphi}_{x_\lambda}$, so daß sogar

$$\bigvee_{\lambda<\mu<k} \mathfrak{w}^{\varphi}_{x_\mu} \leq \overline{X \setminus \bigvee_{\iota\leq\lambda} Z_\iota}$$

und damit wieder (b) erfüllt ist. Wegen der Eigenschaft (b) für λ kann Z_λ aber auch noch so gewählt werden, daß $Z_\lambda \cap \bigcup\{Z_\iota\colon \iota<\lambda\} = \emptyset$ gilt und daß damit dann auch (a) erhalten bleibt.

Daß schließlich aus (4) auch (1) folgt, ergibt sich unmittelbar aus

$$M = \varphi(\bigcup\{Z_x\colon x \in M\}). \qquad \bullet$$

Der oben für Abbildungen formulierte Satz 2.2 kann auf B-Homomorphismen erweitert werden.

3.10 *Es sei* φ *ein surjektiver* B-*Homomorphismus, und* $\mathfrak{u}$ *sei ein Ultrafilter von* X *mit* $\varphi(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. *Dann gibt es ein* $U \in \mathfrak{u}$, *so daß* φ *auf* U *(nämlich auf den Teilmengen von* U*) die Identität ist.*

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\mathfrak{u}$ als freier Ultrafilter vorausgesetzt werden. Zu φ gibt es nach Satz 3.9 (4) eine Zerlegung $\{Z_x\colon x \in X\}$ mit $Z_x \in \mathfrak{w}^{\varphi}_x$ für alle $x \in X$. Zu jedem $y \in X$ gibt es daher genau ein $x = f(y)$ mit $y \in Z_{f(y)}$. Hierdurch wird eine surjektive Abbildung $f\colon X \to X$ definiert. Für eine beliebige Teilmenge M von X gilt

$$\varphi M = \{x\colon M \in \mathfrak{w}^{\varphi}_x\} \subset \{x\colon Z_x \cap M \neq \emptyset\} = f(M),$$

und es folgt $\mathfrak{u} = \varphi(\mathfrak{u}) \leq f(\mathfrak{u})$. Da aber $f(\mathfrak{u})$ selbst ein Ultrafilter ist, muß sogar $f(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ erfüllt sein. Nach Satz 2.2 gibt es daher eine Filtermenge $U \in \mathfrak{u}$, auf der f die Identität ist. Für alle x gilt daher $|U \cap Z_x| \leq 1$, und aus $U \in \mathfrak{w}^{\varphi}_x$ folgt $\mathfrak{w}^{\varphi}_x = \bar{x}$. Damit ergibt sich für jede Teilmenge V von U

$$\varphi V = \{x\colon V \in \mathfrak{w}^{\varphi}_x\} = \{x\colon V \in \bar{x}\} = V. \qquad \bullet$$

Auch der Begriff der einfachen Ultrafilter kann auf B-Homomorphismen übertragen werden, und mit ihrer Hilfe läßt sich auch eine wesentlich allgemeinere Präordnung definieren. Bei ihr bilden dann die einfachen Ultrafilter gerade eine Äquivalenzklasse, und sie sind einfacher als jeder andere freie Ultrafilter. Dennoch erweist sich auch diese Präordnung als wenig befriedigend. Hier soll daher noch auf eine weitere Art von Filterabbildungen eingegangen werden.

4. Abbildungsfilter

Neben Filtern der Grundmenge X werden jetzt auch Filter der Abbildungsmenge F herangezogen. Solche Filter sollen zur besseren Unterscheidung nachstehend vorzugsweise mit ω, ihre Filtermengen mit Ω bezeichnet werden.

Definition 4a: *Es sei* ω *ein fester Filter von* F, *und* $\mathfrak{a}$ *sei ein beliebiger Filter von* X. *Dann heißt die durch*

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) := \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a})$$

definierte Abbildung $\tilde{\omega}: \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ *die dem Abbildungsfilter* ω *zugeordnete Filterabbildung.*

4.1 *Die einem Abbildungsfilter* $\omega \neq \mathfrak{o}$ *zugeordnete Filterabbildung besitzt folgende Eigenschaften:*

(1) $\tilde{\omega}(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \vee \tilde{\omega}(\mathfrak{b})$.

(2) *Aus* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *folgt* $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \leq \tilde{\omega}(\mathfrak{b})$.

(3) $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$ *ist gleichwertig mit* $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

(4) *Ist* ω *ein Ultrafilter und ist* $\mathfrak{u}$ *ebenfalls ein Ultrafilter von* X, *so ist auch* $\tilde{\omega}(\mathfrak{u})$ *ein Ultrafilter.*

Beweis: Aus der Definition von $\tilde{\omega}$ folgt wegen Satz 2.1

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} (f(\mathfrak{a}) \vee f(\mathfrak{b}))$$

$$= \bigwedge_{\Omega \in \omega} \Big(\bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a}) \vee \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{b})\Big) = \mathfrak{c},$$

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \vee \tilde{\omega}(\mathfrak{b}) = \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a}) \vee \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}'.$$

Unmittelbar erhält man $\mathfrak{c} \geq \mathfrak{c}'$. Zum Nachweis von $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}'$ ist zu zeigen, daß aus $C' \in \mathfrak{c}'$ auch $C' \in \mathfrak{c}$ folgt. Zu einer gegebenen Menge $C' \in \mathfrak{c}'$ gibt es Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \in \omega$ und zu jedem $f \in F$ Filtermengen $A_f \in \mathfrak{a}$, $B_f \in \mathfrak{b}$ mit

$$C' \supset \bigcup_{f \in \Omega_1} f(A_f) \cup \bigcup_{f \in \Omega_2} f(B_f).$$

Hieraus folgt mit $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$

$$C' \supset \bigcup_{f \in \Omega} f(A_f) \cup \bigcup_{f \in \Omega} f(B_f) = \bigcup_{f \in \Omega} (f(A_f) \cup f(B_f)),$$

und diese letzte Menge ist eine Filtermenge von $\mathfrak{c}$. Damit ist (1) bewiesen, woraus (2) unmittelbar folgt. Weiter ergibt sich (3) daraus, daß $f(A) = \emptyset$ gleichwertig mit $A = \emptyset$ ist. Hieraus folgt beim Nachweis von (4) jedenfalls $\tilde{\omega}(\mathfrak{u}) \neq \mathfrak{o}$. Es ist also nur noch zu zeigen, daß bei gegebener Teilmenge M von X einer der beiden Fälle $M \in \tilde{\omega}(\mathfrak{u})$ oder $X \setminus M \in \tilde{\omega}(\mathfrak{u})$ erfüllt ist.

Dazu sei

$$\hat{M} := \{f\colon f \in F \textit{ und } M \in f(\mathfrak{u})\}.$$

Fall 1: $\hat{M} \in \omega$.
Dann folgt $M \in \bigvee \{f(\mathfrak{u}): f \in \hat{M}\} \geq \tilde{\omega}(\mathfrak{u})$ und daher erst recht $M \in \tilde{\omega}(\mathfrak{u})$.

Fall 2: $\hat{M} \notin \omega$.
Da ω als Ultrafilter vorausgesetzt wurde, muß dann $F \setminus M \in \omega$ erfüllt sein. Nun gilt aber, weil auch $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter ist,

$$F \setminus \hat{M} = \{f: f \notin \hat{M}\} = \{f: M \notin f(\mathfrak{u})\} = \{f: X \setminus M \in f(\mathfrak{u})\}.$$

Es folgt

$$X \setminus M \in \bigvee \{f(\mathfrak{u}): f \in F \setminus \hat{M}\} \geq \tilde{\omega}(\mathfrak{u})$$

und daher jetzt $X \setminus M \in \tilde{\omega}(\mathfrak{u})$. •

Die Eigenschaften (1), also auch (2), und (3) werden sich nachher als kennzeichnend für diese Filterabbildungen erweisen.

Die von Abbildungen $f \in F$ induzierten Filterabbildungen sind Spezialfälle der hier betrachteten Filterabbildungen: Mit dem Hauptfilter $\omega = \bar{f}$ erhält man

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\Omega \in \bar{f}} \bigvee_{g \in \Omega} g(\mathfrak{a}) = \bigvee_{g \in \{f\}} g(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a}).$$

Weiter sei φ ein B-Homomorphismus. Bei gegebenem Filter $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ ordne man jeder Menge $B \in \varphi^{-}(\mathfrak{a})$ die Abbildungsmenge

$$\Omega_B^{\mathfrak{a}} := \{f: B \in f(\mathfrak{a})\}$$

zu. Dann ist $\{\Omega_B^{\mathfrak{a}}: B \in \varphi^{-}(\mathfrak{a})\}$ eine Filterbasis für einen Abbildungsfilter $\omega_{\mathfrak{a}}$. Mit dem Durchschnittsfilter $\omega = \bigwedge \{\omega_{\mathfrak{a}^*}: \mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{o}\}$ ergibt sich für einen beliebigen Filter $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o} < \tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \leq \tilde{\omega}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{B \in \varphi^{-}(\mathfrak{a})} \bigvee_{f \in \Omega_B^{\mathfrak{a}}} f(\mathfrak{a}) \leq \bigwedge_{B \in \varphi^{-}(\mathfrak{a})} \bar{B} = \varphi^{-}(\mathfrak{a}).$$

Speziell sei hierbei für $\mathfrak{a}$ ein Ultrafilter $\mathfrak{u}$ gewählt. Wegen $\mathfrak{o} < \tilde{\omega}(\mathfrak{u}) \leq \varphi^{-}(\mathfrak{u})$ und weil $\varphi^{-}(\mathfrak{u})$ nach Satz 3.6 mit $\mathfrak{u}$ ebenfalls ein Ultrafilter ist, erhält man jetzt sogar $\tilde{\omega}(\mathfrak{u}) = \varphi^{-}(\mathfrak{u})$.

Definition 4b: *Für* $g \in F$, $\Omega \subset F$ *und für Filter* ω, ω' *von* F *sei*

$$g \circ \Omega := \{g \circ f: f \in \Omega\}, \quad g \circ \omega := \overline{\{g \circ \Omega: \Omega \in \omega\}},$$
$$\omega' \Box \omega := \bigwedge_{\Omega' \in \omega'} \bigvee_{g \in \Omega'} g \circ \omega.$$

Man bestätigt unmittelbar, daß $\{g \circ \Omega: \Omega \in \omega\}$ eine Filterbasis ist, wodurch der zweite Teil der Definition gerechtfertigt wird. Weiter ist $\omega' \Box \omega$ wieder ein Abbildungsfilter. Für ihn gilt

4.2 $\quad \widetilde{\omega' \Box \omega} = \tilde{\omega}' \circ \tilde{\omega}.$

Beweis: $\Omega^* \in \omega' \Box \omega$ ist gleichwertig damit, daß es ein $\Omega' \in \omega'$ und zu jedem $g \in \Omega'$ ein $\Omega_g \in \omega$ gibt mit

$$\Omega^* \supset \bigcup_{g \in \Omega'} \bigcup_{f \in \Omega_g} g \circ f.$$

Mit einem gegebenen Filter $\mathfrak{a}$ ist daher

$$B \in \widetilde{\omega' \square \omega}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\Omega^* \in \omega' \square \omega} \bigvee_{h \in \Omega^*} h(\mathfrak{a})$$

gleichwertig damit, daß mit den obigen Bezeichnungen und mit Mengen $A_{g,f} \in \mathfrak{a}$

$$B \supset \bigcup_{g \in \Omega'} \bigcup_{f \in \Omega_g} g(f(A_{g,f}))$$

gilt. Andererseits ist

$$B \in \tilde{\omega}'(\tilde{\omega}(\mathfrak{a})) = \bigwedge_{\Omega' \in \omega'} \bigvee_{g \in \Omega'} g(\tilde{\omega}(\mathfrak{a})) = \bigwedge_{\Omega' \in \omega'} \bigvee_{g \in \Omega'} g(\bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a}))$$

bei entsprechenden Bezeichnungen gleichwertig mit

$$B \supset \bigcup_{g \in \Omega'} g(\bigcup_{f \in \Omega_g} f(A_{g,f})) = \bigcup_{g \in \Omega'} \bigcup_{f \in \Omega_g} g(f(A_{g,f})).$$

Wegen der Gleichheit der in beiden Fällen rechts stehenden Ausdrücke folgt die Behauptung. ●

Die Menge der von Abbildungsfiltern induzierten Filterabbildungen ist also hiernach gegenüber der Hintereinanderschaltung abgeschlossen.

4.3 *Sind* ω *und* ω' *Ultrafilter, so ist für alle* $g \in F$ *auch* $g \circ \omega$ *ein Ultrafilter, und* $\omega' \square \omega$ *ist ebenfalls ein Ultrafilter.*

Beweis: Wegen $\omega \neq \mathfrak{o}$ ist auch $g \circ \omega \neq \mathfrak{o}$. Zum Nachweis der Ultrafiltereigenschaft sei nun eine Teilmenge Ω' von F gegeben. Dann sei

$$\Omega := \{f\colon g \circ f \in \Omega'\}.$$

Fall 1: $\Omega \in \omega$.
Dann folgt $g \circ \Omega \subset \Omega'$, wegen $g \circ \Omega \in g \circ \omega$ also $\Omega' \in g \circ \omega$.

Fall 2: $\Omega \notin \omega$.
Da ω ein Ultrafiler ist, muß dann $F \setminus \Omega \in \omega$ erfüllt sein. Nun ist

$$F \setminus \Omega = \{f\colon g \circ f \notin \Omega'\} = \{f\colon g \circ f \in F \setminus \Omega'\}.$$

Daher folgt $g \circ (F \setminus \Omega) \subset F \setminus \Omega'$ und somit jetzt $F \setminus \Omega' \in g \circ \omega$.

Damit ist $g \circ \omega$ für alle $g \in F$ ein Ultrafilter. Wegen

$$\omega' \square \omega = \bigwedge_{\Omega' \in \omega'} \bigvee_{g \in \Omega'} g \circ \omega$$

ist nach Satz 1.2 dann auch $\omega' \square \omega$ ein Ultrafilter. ●

In dem folgenden Satz wird wegen der Sonderstellung der dort auftretenden Abbildungsfilter statt des Buchstaben ω ausnahmsweise der Buchstabe ψ benutzt.

4.4 *Zu je zwei Filtern* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ *von* X *gibt es einen Filter* $\psi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}$ *von* F *mit folgender Eigenschaft: Für alle Filter* ω *von* F *ist* $\omega \leq \psi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}$ *gleichwertig mit* $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \leq \mathfrak{b}$.

Im Fall eines Ultrafilters $\mathfrak{u}$ *ist* $\mathfrak{o} < \omega \leq \psi_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{a}}$ *sogar gleichwertig mit* $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{u}$.

Beweis: Jeder Filtermenge $B \in \mathfrak{b}$ sei die Abbildungsmenge

$$\Psi_B^{\mathfrak{a}} := \{f \colon B \in f(\mathfrak{a})\}$$

zugeordnet. Wegen $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, also auch $B \neq \emptyset$, ist diese Menge nicht leer. Außerdem ergibt sich unmittelbar

$$\Psi_{B \cap B'}^{\mathfrak{a}} = \Psi_B^{\mathfrak{a}} \cap \Psi_{B'}^{\mathfrak{a}}.$$

Daher ist $\{\Psi_B^{\mathfrak{a}} \colon B \in \mathfrak{b}\}$ eine Filterbasis für einen Filter $\psi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{o}$. Aus $\omega \leq \psi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}$ folgt

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a}) \leq \bigwedge_{B \in \mathfrak{b}} \bigvee_{f \in \Psi_B^{\mathfrak{a}}} f(\mathfrak{a}) \leq \bigwedge_{B \in \mathfrak{b}} \bar{B} = \mathfrak{b}.$$

Umgekehrt sei $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \leq \mathfrak{b}$ vorausgesetzt. Zu jedem $B \in \mathfrak{b}$ existiert dann ein $\Omega_B^* \in \omega$ mit

$$B \in \bigvee_{f \in \Omega_B^*} f(\mathfrak{a}),$$

also mit $B \in f(\mathfrak{a})$ für alle $f \in \Omega_B^*$. Es folgt $\Omega_B^* \subset \Psi_B^{\mathfrak{a}}$ und daher $\omega \leq \psi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}$.

Im Fall eines Ultrafilters $\mathfrak{u}$ ist also $\omega \leq \psi_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{a}}$ gleichwertig mit $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) \leq \mathfrak{u}$, also mit $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{u}$ oder $\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$. Die zweite Alternative entfällt wegen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und wegen Satz 4.1 genau im Fall $\omega \neq \mathfrak{o}$. ●

Verschiedene Abbildungsfilter können durchaus dieselbe Filterabbildung induzieren und können daher als äquivalent angesehen werden.

Definition 4c: *Zwei Abbildungsfilter ω, ω' heißen äquivalent (in Zeichen: $\omega \approx \omega'$), wenn ihre induzierten Filterabbildungen übereinstimmen, wenn also $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}'$ gilt.*

4.5 *Zu jedem Abbildungsfilter ω gibt es genau einen gröbsten Abbildungsfilter ω^* mit $\omega \approx \omega^*$. Es gilt im Fall $\omega \neq \mathfrak{o}$*

$$\omega^* = \bigwedge \{\Psi_{\tilde{\omega}(\mathfrak{a})}^{\mathfrak{a}} \colon \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}\} = \bigvee \{\omega' \colon \omega' \approx \omega\},$$

$$\omega^{**} = \omega^*, \quad \omega \approx \omega' \textit{ ist gleichwertig mit } \omega^* = \omega^{*\prime}.$$

Beweis: Im Fall $\omega = \mathfrak{o}$ ist $\tilde{\omega}$ diejenige Filterabbildung, die alle Filter von X auf den Nullfilter abbildet. Wegen Satz 4.1 (3) ist sie daher nur zu sich selbst äquivalent, so daß die Behauptung mit $\omega^* = \omega$ erfüllt ist. Weiter kann also $\omega \neq \mathfrak{o}$ vorausgesetzt werden. Dann sei ω^* durch

$$\omega^* := \bigwedge \{\Psi_{\tilde{\omega}(\mathfrak{a})}^{\mathfrak{a}} \colon \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}\}$$

definiert. Nach Satz 4.4 ist ω^* der gröbste Filter mit $\tilde{\omega}^*(\mathfrak{a}) \leq \tilde{\omega}(\mathfrak{a})$ für alle Filter $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$. Da aus $\omega' \approx \omega$ nach Definition $\tilde{\omega}'(\mathfrak{a}) = \tilde{\omega}(\mathfrak{a})$ für alle Filter $\mathfrak{a}$ folgt, muß wegen der erwähnten Eigenschaft von ω^* jedenfalls $\omega' \leq \omega^*$ erfüllt sein und insbesondere $\omega \leq \omega^*$. Hieraus folgt aber

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\Omega \in \omega} \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{a}) \leq \bigwedge_{\Omega^* \in \omega^*} \bigvee_{f \in \Omega^*} f(\mathfrak{a}) = \tilde{\omega}^*(\mathfrak{a}) \leq \tilde{\omega}(\mathfrak{a}),$$

insgesamt also $\tilde{\omega}^*(\mathfrak{a}) = \tilde{\omega}(\mathfrak{a})$ für alle Filter $\mathfrak{a}$. Damit hat sich sogar $\omega \approx \omega^*$ ergeben, und ω^* ist der gröbste Filter dieser Äquivalenzklasse. Daraus folgt noch

$$\omega^* = \bigvee \{\omega' \colon \omega' \approx \omega\}.$$

Die übrigen Behauptungen erhält man unmittelbar. ●

4.6 *Es sei* $\{\mathfrak{u}_\iota: \iota \in I\}$ *eine Menge paarweise verschiedener Ultrafilter von* X, *und für jedes* $\iota \in I$ *sei* $\mathfrak{u}_\iota$ *ein beliebiger Filter* $\chi(\mathfrak{u}_\iota) \neq \mathfrak{o}$ *zugeordnet. Dann gibt es einen gröbsten Abbildungsfilter* ω_χ *mit* $\tilde{\omega}_\chi(\mathfrak{u}_\iota) \leq \chi(\mathfrak{u}_\iota)$ *für alle* $\iota \in I$. *Ist hierbei* $\chi(\mathfrak{u}_\iota)$ *ebenfalls ein Ultrafilter, so gilt sogar* $\tilde{\omega}_\chi(\mathfrak{u}_\iota) = \chi(\mathfrak{u}_\iota)$.

Beweis: Es sei

$$\omega_\chi := \bigwedge_{\iota \in I} \psi^{\mathfrak{u}_\iota}_{\chi(\mathfrak{u}_\iota)}.$$

Es muß nur $\omega_\chi \neq \mathfrak{o}$ bewiesen werden. Mit Hilfe von Satz 4.4 folgt dann

$$\mathfrak{o} < \tilde{\omega}_\chi(\mathfrak{u}_\iota) \leq \widetilde{\psi^{\mathfrak{u}_\iota}_{\chi(\mathfrak{u}_\iota)}}(\mathfrak{u}_\iota) \leq \chi(\mathfrak{u}_\iota)$$

und im Fall eines Ultrafilters $\chi(\mathfrak{u}_\iota)$ sogar die Gleichheit.

Beim weiteren Beweis soll zur Vereinfachung statt $\psi^{\mathfrak{u}_\iota}_{\chi(\mathfrak{u}_\iota)}$ nur ψ_ι geschrieben werden. Angenommen werde jetzt $\omega_\chi = \mathfrak{o}$. Dann gibt es endlich viele Indizes $\iota_1, \dots, \iota_n$ mit $\psi_{\iota_1} \wedge \dots \wedge \psi_{\iota_n} = \mathfrak{o}$. Daher gibt es weiter Filtermengen $\Psi_\nu \in \psi_{\iota_\nu}$ $(\nu = 1, \dots, n)$ mit $\Psi_1 \cap \dots \cap \Psi_n = \emptyset$. Zu jedem ν existiert nun ein $B_\nu \in \chi(\mathfrak{u}_{\iota_\nu})$ mit

$$\Omega_\nu := \{f\colon B_\nu \in f(\mathfrak{u}_{\iota_\nu})\} \subset \Psi_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Erst recht muß daher

$$\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_n = \emptyset \tag{*}$$

erfüllt sein. Und diese Gleichung soll nun zum Widerspruch geführt werden.

Da die Ultrafilter $\mathfrak{u}_{\iota_1}, \dots, \mathfrak{u}_{\iota_n}$ paarweise verschieden sind, gibt es Filtermengen $U_1 \in \mathfrak{u}_{\iota_1}, \dots, U_n \in \mathfrak{u}_{\iota_n}$, die paarweise punktfremd sind. Wegen $B_\nu \in \chi(\mathfrak{u}_{\iota_\nu}) \neq \mathfrak{o}$ gilt $B_\nu \neq \emptyset$, und es gibt eine Abbildung $f_\nu\colon U_\nu \to B_\nu$ $(\nu = 1, \dots, n)$. Und da die Mengen $U_1, \dots, U_n$ paarweise punktfremd sind, besitzen die Abbildungen $f_1, \dots, f_n$ eine gemeinsame Fortsetzung zu einer Abbildung $f\colon X \to X$. Es folgt $f(\mathfrak{u}_{\iota_\nu}) = f_\nu(\mathfrak{u}_{\iota_\nu}) \leq \overline{B_\nu}$, also $B_\nu \in f(\mathfrak{u}_{\iota_\nu})$, und daher $f \in \Omega_\nu$ $(\nu = 1, \dots, n)$. Damit hat sich $f \in \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_n$ ergeben im Widerspruch zu (*). ●

In dem gerade bewiesenen Satz kann man als Ultrafiltermenge insbesondere die Menge aller Ultrafilter benutzen. Wenn man dann jedem Ultrafilter als Bildfilter wieder einen Ultrafilter zuordnet, gibt es nach dem Satz einen gröbsten Abbildungsfilter, dessen induzierte Filterabbildung alle Ultrafilter auf die vorgeschriebenen Bildfilter abbildet. Dieser Abbildungsfilter und die zugehörige Filterabbildung sind durch diese Vorgabe aber keineswegs eindeutig bestimmt, auch nicht bis auf Äquivalenz. Die Bildfilter von Vereinigungsfiltern endlich vieler Ultrafilter sind dann zwar auch mit festgelegt. Aber für die Bildfilter von Vereinigungen unendlich vieler Ultrafilter gibt es noch erhebliche Spielräume. Andererseits sind die Bildfilter unendlicher Vereinigungen immerhin durch die Vereinigungsfilter der entsprechenden Einzelbildfilter nach unten beschränkt. Hiermit hängt es auch zusammen, daß man den Ultrafiltern nicht beliebige Bildfilter vorschreiben kann: Die vorgegebenen Filter können dann im allgemeinen nur obere Schranken für die Bildfilter liefern. Anders liegen die Verhältnisse jedoch, wenn man sicher ist, daß die vorgeschriebenen Bildfilter in ihrem gegenseitigen Verhältnis alle erforderlichen Bedingungen erfüllen.

4.7 *Es sei* $\chi\colon \mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften* (1) *und* (3) *aus Satz 4.1. Es gelte also* $\chi(\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})=\chi(\mathfrak{a})\vee\chi(\mathfrak{b})$ *für je zwei Filter* $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{F}$, *und außerdem sei* $\chi(\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$ *gleichwertig mit* $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$. *Dann gibt es einen Abbildungsfilter* ω *mit* $\tilde{\omega}=\chi$.

Beweis: Aus der ersten Eigenschaft ergibt sich bekanntlich die Isotonie von χ: Aus $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}$ folgt $\chi(\mathfrak{a})\leq\chi(\mathfrak{b})$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.4 sei nun

$$\omega := \bigwedge \{\psi^{\mathfrak{a}}_{\chi(\mathfrak{a})}\colon \mathfrak{a}>\mathfrak{o}\}.$$

Im ersten Beweisschritt wird $\omega\neq\mathfrak{o}$ nachgewiesen: Aus der Annahme $\omega=\mathfrak{o}$ folgt die Existenz von endlich vielen paarweise verschiedenen Filtern $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n>\mathfrak{o}$ mit

$$\psi^{\mathfrak{a}_1}_{\chi(\mathfrak{a}_1)}\wedge\ldots\wedge\psi^{\mathfrak{a}_n}_{\chi(\mathfrak{a}_n)}=\mathfrak{o}. \tag{*}$$

Eine Filterbasis von $\psi^{\mathfrak{a}_\nu}_{\chi(\mathfrak{a}_\nu)}$ bilden die Mengen $\Psi^{\mathfrak{a}_\nu}_{A'_\nu}=\{f\colon A'_\nu\in f(\mathfrak{a}_\nu)\}$ mit $A'_\nu\in\chi(\mathfrak{a}_\nu)$. Wegen (*) gibt es daher Mengen $A'_1\in\chi(\mathfrak{a}_1),\ldots,A'_n\in\chi(\mathfrak{a}_n)$ mit

$$\Psi^{\mathfrak{a}_1}_{A'_1}\cap\ldots\cap\Psi^{\mathfrak{a}_n}_{A'_n}=\emptyset, \tag{**}$$

und diese Gleichung soll, ähnlich wie im vorangehenden Beweis, zum Widerspruch geführt werden.

Zunächst werden Filtermengen $A_1\in\mathfrak{a}_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{a}_n$ in spezieller Weise ausgewählt, nämlich so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

Für alle k-Tupel $(\iota_1,\ldots,\iota_k)$ paarweise verschiedener Indizes aus $\{1,\ldots,n\}$ mit $1\leq k\leq n\text{-}1$ soll aus

$$\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_k}>\bigvee\{\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_k}\vee\mathfrak{a}_{\iota_{k+1}}\colon \iota_{k+1}\neq\iota_1,\ldots,\iota_k\}$$

stets

$$A^*_{\iota_1,\ldots,\iota_k}:=A_{\iota_1}\cap\ldots\cap A_{\iota_k}\setminus\bigcup\{A_{\iota_1}\cap\ldots\cap A_{\iota_k}\cap A_{\iota_{k+1}}\colon \iota_{k+1}\neq\iota_1,\ldots,\iota_k\}\neq\emptyset$$

folgen. Eine solche Auswahl ist möglich: Man beginne mit einer Filtermenge $A^*_{1,\ldots,n}\in\mathfrak{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_n$, die man so klein wählt, daß aus $\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_{n-1}}\neq\mathfrak{o}$ immer auch

$$\mathfrak{d}_{\iota_1,\ldots,\iota_{n-1}}:=\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_{n-1}}\wedge\overline{(X\setminus A^*_{1,\ldots,n})}\neq\mathfrak{o}$$

erfüllt ist. Danach wählt man entsprechend Mengen $A^*_{\iota_1,\ldots,\iota_{n-1}}\in\mathfrak{d}_{\iota_1,\ldots,\iota_{n-1}}$ aus und steige weiter zu kürzeren Durchschnitten auf. Es ist dann z.B.

$$A_1=A^*_1\cup\bigcup_{i=2}^{n}A^*_{1,i}\cup\bigcup_{i=2}^{n-1}\;\bigcup_{j=i+1}^{n}A^*_{1,i,j}\cup\ldots\cup A^*_{1,\ldots,n},$$

die Filtermengen $A_\nu\in\mathfrak{a}_\nu$ werden auf diese Art also als Vereinigungen punktfremder Mengen dargestellt, die ihrerseits Mengen aus den den Indizes entsprechenden Durchschnittsfiltern sind.

Aus

$$\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_k}>\bigvee\{\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_k}\wedge\mathfrak{a}_{\iota_{k+1}}\colon \iota_{k+1}\neq\iota_1,\ldots,\iota_k\}\neq\mathfrak{o}$$

bzw. $\mathfrak{a}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_n\neq\mathfrak{o}$ im Fall $k=n$ folgt nun einerseits $A^*_{\iota_1,\ldots,\iota_k}\neq\emptyset$, andererseits wegen $\mathfrak{o}<\mathfrak{a}_{\iota_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{a}_{\iota_k}$ und wegen der Isotonie von χ auch

$$\mathfrak{o} < \chi(\mathfrak{a}_{\iota_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{\iota_k}) \leq \chi(\mathfrak{a}_{\iota_1}) \wedge \ldots \wedge \chi(\mathfrak{a}_{\iota_k}),$$

woraus sich $A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_k} \neq \emptyset$ ergibt. Damit existiert dann eine Abbildung

$$f_{\iota_1,\ldots,\iota_k} : A^*_{\iota_1,\ldots,\iota_k} \to A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_k}.$$

Da die Definitionsbereiche dieser Abbildungen punktfremd sind, besitzen sie eine gemeinsame Erweiterung zu einer Abbildung $f\colon X \to X$. Aus der Konstruktion folgt nun unmittelbar

$$f(\mathfrak{a}_\nu) \leq \overline{f(A_\nu)} \leq \overline{A'_\nu}, \quad \textit{also} \quad f \in \Psi^{\mathfrak{a}_\nu}_{A'_\nu} \; (\nu = 1, \ldots, n)$$

und damit der Widerspruch $f \in \Psi^{\mathfrak{a}_1}_{A'_1} \cap \ldots \cap \Psi^{\mathfrak{a}_n}_{A'_n}$ zu (**). Damit ist $\omega \neq \mathfrak{o}$ gezeigt.

Bei diesem Beweisschritt wurde nur die Existenz einer Abbildung f in der Durchschnittsmenge aus (**) gebraucht. Aber natürlich hat man bei der Definition der Abbildungen $f_{\iota_1,\ldots,\iota_k}$ noch erhebliche Freiheit. Zum Beispiel kann man für jeden Punkt $y \in A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_k}$ eine Abbildung $f^y_{\iota_1,\ldots,\iota_k}$ dadurch definieren, daß sie die ganze Menge $A^*_{\iota_1,\ldots,\iota_k}$ auf $\{y\}$ abbildet. Es folgt dann bereits für einen beliebigen Punkt $x \in A^*$

$$\bigcup \{f^y_{\iota_1,\ldots,\iota_k}(x) \colon y \in A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_k}\} = A'_{\iota_1} \cap \ldots \cap A'_{\iota_k}. \qquad (*{*}*)$$

Im zweiten Beweisschritt ist wegen $\tilde{\omega}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o} = \chi(\mathfrak{o})$ nur noch $\tilde{\omega}(\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{b})$ für alle Filter $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ zu zeigen. Zunächst gilt

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{b}) = \bigwedge_{\Omega \in \omega} \; \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{b}) \leq \bigwedge_{\Omega \in \psi^{\mathfrak{b}}_{\chi(\mathfrak{b})}} \; \bigvee_{f \in \Omega} f(\mathfrak{b}) = \widetilde{\psi^{\mathfrak{b}}_{\chi(\mathfrak{b})}}(\mathfrak{b}) \leq \chi(\mathfrak{b}),$$

so daß nur noch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens nachzuweisen ist. Nun gibt es zu einer gegebenen Menge $B^* \in \tilde{\omega}(\mathfrak{b})$ eine Filtermenge $\Omega \in \omega$ und Mengen $B_f \in \mathfrak{b}$ mit

$$B^* \supset \bigcup_{f \in \Omega} f(B_f).$$

Ω enthält seinerseits eine Filtermenge von ω der schon oben benutzten Form

$$\Psi = \Psi^{\mathfrak{a}_1}_{A'_1} \cap \ldots \cap \Psi^{\mathfrak{a}_n}_{A'_n}$$

mit $A'_1 \in \chi(\mathfrak{a}_1), \ldots, A'_n \in \chi(\mathfrak{a}_n)$. Dabei kann nach eventueller Verkleinerung von Ψ sogar vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{b}$ unter den Filtern $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ vorkommt, daß also ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}$ und $A'_1 = B' \in \chi(\mathfrak{b})$ gilt. Es folgt

$$B^* \supset \bigcup_{f \in \Psi} f(B_f) \supset B',$$

wobei sich die rechte Inklusion mit Hilfe der Bemerkungen zu Gleichung (***) und unter Ausnutzung der Eigenschaften von χ ergibt. Damit ist $\tilde{\omega}(\mathfrak{b}) \geq \chi(\mathfrak{b})$, insgesamt also die Gleichheit bewiesen. •

Die letzten beiden Sätze zeigen die Reichhaltigkeit der Menge der durch Abbildungsfilter induzierten Filterabbildungen. Und da diese Menge außerdem nach Satz 4.2 gegenüber der Hintereinanderschaltung der Filterabbildungen abgeschlossen ist, kann sie gute Möglichkeiten für einen Strukturvergleich von Ultrafiltern bieten. Andererseits kann man nach Satz 4.6 zwei beliebigen Ultrafiltern $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ die Bildfilter $\chi(\mathfrak{u}) = \mathfrak{v}$ und $\chi(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$ vorschreiben, so daß sie durch eine Filterabbildung wechselseitig aufeinander abgebildet werden. Es könnte daher auch sein, daß sich das Strukturproblem der Ultrafilter als ein Scheinproblem erweist.

Literatur

[1] D. Booth, Countably Indexed Ultrafilters, Dissertation Univ. Wisconsin 1969.
[2] D. Booth, Ultrafilters on Countable Set, Annals of Math. Logic (1970), 1–24.
[3] G. Choquet, Construction d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, Bull. Sci. Math. 92 (1968), 41–48.
[4] G. Choquet, Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, Bull. Sci. Math. 92 (1968), 143–153.
[5] M.E. Rudin, Types of Ultrafilters, Topol. Seminar Wisconsin (1965).
[6] M.E. Rudin, Partial Orders on the Types in $\beta\mathbb{N}$, Transactions of the Am. Math. Soc. 139 (1971), 353–362.
[7] S. Sirota, The Problem of Classification of Filters, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 191 (1970), 408–411.
[8] P. Sperner, Über eine Ordnungsrelation für Ultrafilter, Braunschweiger Dissertationen 1971.